FGN ; Analyse 2

Développement : Expression de $\zeta(2k)$:

leçons $\begin{cases} 230 \\ 235 \\ 243 \\ 246 \\ (213) \end{cases}$

Lemme :

Soit $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$. f admet un DSE au voisinage de 0, et

$\forall |z| < 2\pi$: $f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2 \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \cdot \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{2k}} \right) \cdot z^{2k}$

Soit φ la fonction 2π périodique définie par $\varphi(x) = e^{\frac{zx}{2\pi}}$ pour $x \in]-\pi, \pi]$, $z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$.
Du développement en série de Fourier de φ, on va déduire le développement en série entière de $f : z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$ au voisinage de 0.

φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut donc calculer ses coefficients de Fourier :

$$c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{+\frac{zx}{2\pi}} \cdot e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{\frac{z}{2\pi} - ni} \cdot \left[e^{x\left(\frac{z}{2\pi} - ni\right)} \right]_{x=-\pi}^{x=\pi}$$

$$= \frac{(-1)^n \cdot (e^{z/2} - e^{-z/2})}{z - 2i\pi n}$$

φ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc on peut appliquer le théorème de Dirichlet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2} \left[\varphi(x^-) + \varphi(x^+) \right] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi) \cdot e^{inx}$$

On applique en $x = \pi$ pour faire apparaître $f(z)$

$$\frac{1}{2} \left(e^{\frac{z\pi}{2\pi}} + e^{-\frac{z\pi}{2\pi}} \right) = \left(e^{z/2} - e^{-z/2} \right) \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n e^{in\pi}}{z - 2i\pi n}$$

on multiplie par le conjugué

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{z}{2}} (e^z + 1)}{e^{-z/2} (e^z - 1)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n \cdot e^{i\pi n} \cdot (z + 2i\pi n)}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{z}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$$

soustraire $\frac{1}{2}$, mult par z.

$$\Longrightarrow \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + 2 \cdot \sum_{n \geq 1} \underbrace{\boxed{\frac{z^2}{z^2 + 4\pi^2 n^2}}}_{(*)}$$

On développe désormais $(*)$ en série entière :

Pour $|z| < 2\pi$, $\left| \frac{z}{2\pi n} \right| < 1$ (et $\left| \frac{z^2}{(2\pi n)^2} \right| < 1$.) $\forall n \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$\frac{z^2}{z^2 + 4\pi^2 n^2} = \frac{z^2}{4\pi^2 n^2} \times \frac{1}{1 + \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}} = \frac{z^2}{4\pi^2 n^2} \cdot \sum_{k \geq 0} (-1)^k \cdot \frac{z^{2k}}{(4\pi^2 n^2)^k} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \cdot \frac{z^{2(k+1)}}{(4\pi^2 n^2)^{k+1}}$$

$$= \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{z^{2k}}{(4\pi^2 n^2)^k} = \sum_{k \geq 1} \underbrace{(-1)^{k-1} \frac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}}_{U_{n,k}}$$

⚠ Pour utiliser Fubini-Lebesgue, on va mq $\sum_k |U_{n,k}| < +\infty$ puis que $\sum_n \sum_k |U_{n,k}| < +\infty$

Alors on pourra permuter les séries.

$$\sum_{k \geq 1} |U_{n,k}| \leq \sum_{k \geq 1} \left(\frac{|z|^2}{(2\pi n)^2} \right)^k = \frac{|z|^2}{(2\pi n)^2} \times \frac{1}{1 - \frac{|z|^2}{(2\pi n)^2}} = \frac{|z|^2}{(2\pi n)^2 - |z|^2} < +\infty.$$

$\frac{|z|^2}{(2\pi n)^2} < 1$; $u_0 \times \frac{1}{1-q}$

$\sum_{n\geq 1} \sum_{k\geq 1} |u_{n,k}| < \sum_{n\geq 1} \frac{|z|^2}{(2\pi n)^2 - |z|^2} < +\infty$. Ainsi par Fubini - Lebesgue,

$$\forall z \in D(0, 2\pi), \quad f(z) = 1 - \frac{z}{2} + z \sum_{n\geq 1} \sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1} \frac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}$$

$$= 1 - \frac{z}{2} + z \cdot \sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1} \cdot \frac{z^{2k}}{(2\pi)^{2k}} \left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2k}} \right)$$

Ainsi, f est prolongeable par continuité en 0 et $f(0) = 1$. On a :

$$\boxed{\forall z \in D(0, 2\pi), \quad f(z) = 1 - \frac{z}{2} + z \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2k}} \right) z^{2k}} \quad (*)$$

Théorème :

Soit $\zeta : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \longmapsto \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^k}$ la fonction zêta de Riemann définie sur les entiers naturels. Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \cdot \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} b_{2k}$, où $(b_n)_{n\geq 0}$ sont les nombres de Bernoulli définis ci-dessous, avec $b_n \in \mathbb{Q}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

On définit $(b_n)_{n\geq 0}$ les nombres de Bernoulli par $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$.

On remarque déjà par $(*)$ que $\boxed{b_0 = 1}$ et $\boxed{b_1 = -\frac{1}{2}}$, et $\boxed{b_{2n+1} = 0 \quad \forall n \geq 1.}$

Considérons $\underbrace{f(z) \cdot (e^z - 1)}_{= z} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} \cdot z^n \right) \cdot \left(\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n!} \right)$

$$\text{produit de Cauchy} \longrightarrow = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!} z^k \cdot \frac{z^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k \cdot z^n}{k!(n-k)!}$$

Ainsi, pour $n \geq 2$, $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!(n-k)!} = 0$ $\quad \times n!$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k b_k = 0$$

Ainsi, $b_{n-1} = -\frac{1}{C_n^{n-1}} \cdot \sum_{k=0}^{n-2} C_n^k \cdot b_k = -\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-2} C_n^k b_k$.

Par récurrence, $b_n \in \mathbb{Q}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. On calcule $b_2 = \frac{1}{6}$; $b_4 = \frac{-1}{30}$; $b_6 = \frac{1}{42}$

Par unicité du DSE, on a $\frac{b_{2k}}{(2k)!} = \cancel{2}\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{2k}}$, et ainsi

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!} b_{2k}.}$$

On calcule ainsi $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Notons que pour k impair, on a quasiment aucune info sur $\zeta(k)$. Un des seuls résultats :

$\zeta(3)$ irrationnel.

Apéry, 1978